



ce
pre
UNI

Aritmética

DIVISIBILIDAD

CICLO
PRE
2023-2



Leonhard Euler (Basilea, Suiza; 15 de abril de 1707-San Petersburgo, Imperio ruso; 18 de septiembre de 1783), fue un matemático y físico suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos.

El interés de Euler en la teoría de números procede de la influencia de Christian Goldbach, amigo suyo durante su estancia en la Academia de San Petersburgo. Gran parte de los primeros trabajos de Euler en teoría de números se basan en los trabajos de Pierre de Fermat. Euler desarrolló algunas de las ideas de este matemático francés pero descartó también algunas de sus conjeturas.



Johann Carl Friedrich Gauss

Braunschweig, 30 de
abril de 1777 - Gotinga, 23 de
febrero de 1855

Fue un matemático, astrónomo,
y físico alemán que contribuyó
significativamente en muchos ámbitos,
incluida la teoría de números, el análisis
matemático, la geometría diferencial,
la estadística, el álgebra, la geodesia,
el magnetismo y la óptica. Considerado ya
en vida como príncipe de los matemáticos.



Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia. Fue de los primeros en extender el concepto de divisibilidad a otros conjuntos además de los números enteros.

DIVISIBILIDAD

Es parte de la teoría de los números que estudia, principalmente, las condiciones que debe tener un número para ser dividido por otro. También nos permite determinar el residuo que se obtiene al dividir dos cantidades enteras, sin necesidad de efectuar la operación.

Ejemplos:

- Si 2 divide a $\overline{mnpq}$, significa que $\overline{mnpq}$ es par
- Si 5 divide a $\overline{ab(b-3)}$, significa que $b = 3$ o $b = 8$.
- Si $\overline{mnp34}$ se divide entre 5, el residuo será 4.

DIVISIBILIDAD

Se dice que el número entero A es divisible por el número entero B , diferente de cero, si existe un número entero k , tal que $A = B \cdot k$, es decir la división de A entre B es exacta.

$$\begin{array}{r} A \overline{) B} \\ - k \end{array}$$

$$A = B \times k$$

Notación:

$$B \mid A$$

$$A = \overset{\circ}{B}$$

Interpretación:

A es divisible por B

B divide a A

A es múltiplo de B

B es divisor de A

A Dividendo
 B divisor
 k Cociente

$$A = \overset{\circ}{B} \iff A = B \cdot k$$

A es divisible entre B

Ejemplos:

$$54 = 6 \times 9 \iff 54 = \overset{\circ}{6}$$

$$15 = 3 \times 5 \iff 15 = \overset{\circ}{3}$$

B se denomina
MÓDULO

Observación: El número entero positivo $a > 1$ es primo, si sus únicos divisores positivos son el 1 y el mismo número.

CONJUNTO DE LOS MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

OBSERVACIONES:

$$A \begin{array}{l} \text{—} \end{array} \begin{array}{l} \textcolor{red}{5} \\ \textcolor{red}{k} \end{array} \Rightarrow A = 5 \times k = \overset{\circ}{5} \left\{ \begin{array}{l} -5 ; -10 ; -15 ; -20 ; -25 ; \dots \\ 0 \\ 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; \dots \end{array} \right.$$

1.- El conjunto de los múltiplos de un número tiene infinitos elementos.

$$A \begin{array}{l} \text{—} \end{array} \begin{array}{l} \textcolor{red}{9} \\ \textcolor{red}{k} \end{array} \Rightarrow A = 9 \times k = \overset{\circ}{9} \left\{ \begin{array}{l} -9 ; -18 ; -27 ; -36 ; -45 ; \dots \\ 0 \\ 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; \dots \end{array} \right.$$

2.- El cero es múltiplo de todos los números excepto de si mismo.

APLICACIÓN 01

¿Cuántos números impares de tres cifras, son múltiplos de 7?

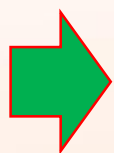
RESOLUCIÓN

Los números son de la forma: $N = \overset{\circ}{7} \rightarrow N = 7k, k \in \mathbb{Z}$

$$100 \leq N < 1\,000$$

$$100 \leq 7k < 1\,000$$

$$14,28 \dots \leq k < 142,85 \dots$$



$$k = 15; 17; 19; \dots; 141 \quad (\text{son 64 valores})$$

Respuesta: 64

Aplicación 2

¿Cuántos números naturales múltiplos de 6 tienen 6 cifras y terminan en la cifra 6 ?

Resolución

Sea: $N = \overset{\circ}{6} = 6k$

$$100\,000 \leq N \leq 999\,999$$

reemplazando

$$100\,000 < 6k < 999\,999$$

$$16\,666,6 \leq k \leq 166\,666,5$$

Considerando los valores de k , tal que al multiplicar por 6, el producto termine en 6.

$$6 \times \overline{\dots a} = \dots 6$$

$$a = 1 \text{ ó } 6$$

$$K = 16\,671; 16\,681; \dots; 166\,661 \rightarrow 15\,000$$

También:

$$K = 16\,676; 16\,686; \dots; 166\,666 \rightarrow 15\,000$$

Total 30 000

CANTIDAD DE MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO EN LOS N PRIMEROS NATURALES

Sea el conjunto de los primeros N naturales:

$1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots ; (N - 1) ; N$

Entonces la cantidad de números que son múltiplos de a se obtiene a partir de:

$$\frac{N}{a} = n, \dots$$

Luego, hay n números que son múltiplos de a .

Sean: $1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots ; 320 ; 321$

$\overset{\circ}{7} \rightarrow \frac{321}{7} = 45,85 \rightarrow$ Hay 45 números que son múltiplos de 7.

$\overset{\circ}{9} \rightarrow \frac{321}{9} = 35, \dots \rightarrow$ Hay 35 números que son múltiplos de 9.

Los números que son $\overset{\circ}{3}$ pero no $\overset{\circ}{5}$

$$\rightarrow \frac{321}{3} = 107 \quad \frac{321}{15} = 21, \dots$$

$$107 - 21 = 86$$

Hay 86 números que son múltiplos de 3 pero no son múltiplos de 5.

APLICACIÓN 03

De los 1 500 primeros números naturales, ¿cuántos son múltiplos de 3 ó 20 pero no de 60?

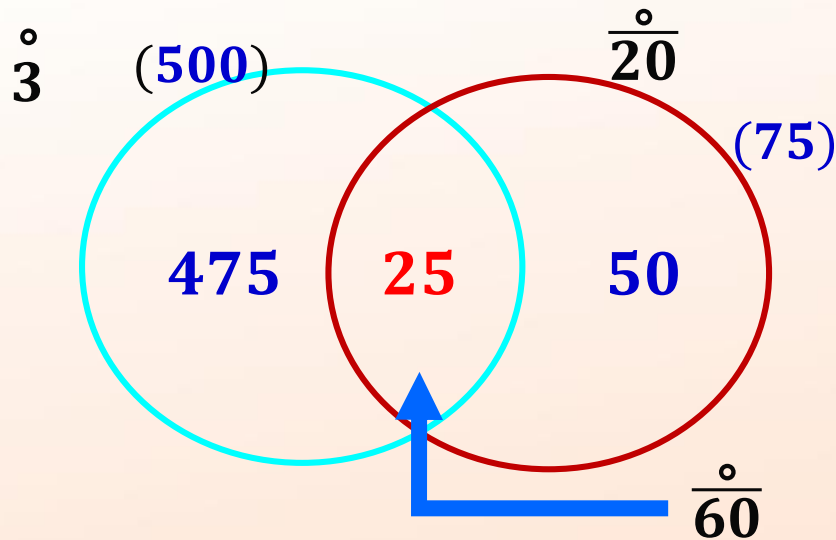
RESOLUCIÓN

Sabemos: $\overset{\circ}{3} \rightarrow \frac{1\ 500}{3} = 500$

$\overset{\circ}{20} \rightarrow \frac{1\ 500}{20} = 75$

$\overset{\circ}{60} \rightarrow \frac{1\ 500}{60} = 25$

Gráficamente:



Hay 525 números que son múltiplos de 3 o 20 pero no de 60.

Respuesta : 525

Si la división es inexacta:

División por defecto

$$A = B \cdot k + r$$

$$A = \underbrace{B \cdot k} + r$$

$$A = \overset{\circ}{B} + r$$

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 3} \\ 1 \quad 9 \end{array}$$

$$28 = \overset{\circ}{3} + 1$$

División por exceso

$$A = B(k + 1) - r_e$$

$$A = \underbrace{B \cdot (k + 1)} - r_e$$

$$A = \overset{\circ}{B} - r_e$$

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 3} \\ 2 \quad 10 \end{array}$$

$$28 = \overset{\circ}{3} - 2$$

$$r + r_e = B$$

$$\overset{\circ}{n} + e = \overset{\circ}{n} - (n - e)$$

$$\overset{\circ}{6} + 5 = \overset{\circ}{6} - 1$$

$$\overset{\circ}{13} + 8 = \overset{\circ}{13} - 5$$

$$\overset{\circ}{7} - 3 = \overset{\circ}{7} + 4$$

$$\overset{\circ}{14} - 9 = \overset{\circ}{14} + 5$$

$$\overset{\circ}{11} + 8 = \overset{\circ}{11} - 3$$

PRINCIPIOS DE DIVISIBILIDAD

Si dos números enteros son divisibles por cierto módulo, entonces la suma o diferencia de ellos también será divisible por dicho módulo.

Consideremos dos números A y B que son divisibles por C

$$A = \overset{\circ}{C} \iff A = C \cdot k_1$$

$$B = \overset{\circ}{C} \iff B = C \cdot k_2$$

Sumando
ambas

$$A + B = C \cdot (k_1 + k_2) \Rightarrow A + B = \overset{\circ}{C}$$

$$\underbrace{25}_{\overset{\circ}{5}} + \underbrace{30}_{\overset{\circ}{5}} = \underbrace{55}_{\overset{\circ}{5}}$$

Todo número entero es divisible por los factores primos que lo forman y por las combinaciones de ellos.

$$18 = 3^2 \cdot 2 \Rightarrow 18 = \overset{\circ}{2} \quad 18 = \overset{\circ}{3} \quad 18 = \overset{\circ}{6} \quad 18 = \overset{\circ}{9} \quad 18 = \overset{\circ}{18}$$

OPERACIONES CON MÚLTIPLOS

$$\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$$

Ejemplo: $\underbrace{60}_{\overset{\circ}{12}} - \underbrace{36}_{\overset{\circ}{12}} = \underbrace{24}_{\overset{\circ}{12}}$

Además: $(\overset{\circ}{n} + a) + (\overset{\circ}{n} + b) = \overset{\circ}{n} + (a + b)$

$$(\overset{\circ}{n} + a) - (\overset{\circ}{n} + b) = \overset{\circ}{n} + (a - b)$$

$$\overset{\circ}{n} \times \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$$

Ejemplo: $\underbrace{14}_{\overset{\circ}{7}} \times \underbrace{35}_{\overset{\circ}{7}} = \underbrace{490}_{\overset{\circ}{7}}$. Luego: $(\overset{\circ}{n})^a = \overset{\circ}{n}$, $a \in \mathbb{Z}^+$

$$(\overset{\circ}{n} + a) \times (\overset{\circ}{n} + b) = \overset{\circ}{n} + (a \times b)$$

Ejemplo: $(\overset{\circ}{8} + 2) \times (\overset{\circ}{8} + 1) = \overset{\circ}{8} + (2 \times 1)$

DIVISIBILIDAD DE UN NÚMERO RESPECTO A SU BASE

$$\overline{abcde}_{(n)} = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + e \\ \overline{(\overset{\circ}{n^2})} + \overline{de}_{(n)} \\ \overline{(\overset{\circ}{n^3})} + \overline{cde}_{(n)} \end{cases}$$

Ejemplos:

$$67131_{(9)} = \begin{cases} \overset{\circ}{9} + 1 \\ \overline{(\overset{\circ}{9^2})} + 31_{(9)} \\ \overline{(\overset{\circ}{9^3})} + 131_{(9)} \end{cases}$$

$$67131_{(9)} = \begin{cases} \overset{\circ}{9} + 1 \\ \overline{81} + 28 \\ \overline{729} + 109 \end{cases}$$

“Si un número entero es divisible por dos o más números simultáneamente, entonces será también divisible por el menor de los múltiplos comunes de los números considerados”

Ejemplo: Si: $N = \overset{\circ}{5}$ $N = \overset{\circ}{7}$ $N = \overset{\circ}{10}$ $\rightarrow N = \overline{\text{MCM}(\overset{\circ}{5}; \overset{\circ}{7}; \overset{\circ}{10})}$
 $\rightarrow N = \overset{\circ}{70}$

En general:

$$\begin{aligned} N &= \overset{\circ}{a} \pm x \\ N &= \overset{\circ}{b} \pm x \\ N &= \overset{\circ}{c} \pm x \end{aligned} \rightarrow N = \overline{\text{MCM}(\overset{\circ}{a}; \overset{\circ}{b}; \overset{\circ}{c})} \pm x$$

Dado dos números enteros cuyo producto es múltiplo de n , y si uno de tales números es coprimo con n , entonces el otro número será múltiplo de n . (**Propiedad de Arquímedes**).

Ejemplo: $3N = \overset{\circ}{5}$ $\rightarrow N = \overset{\circ}{5}$
PESI

APLICACIÓN 4

Determine el mayor número de 4 cifras que puede tomar el número A si:
 $A = \overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{2}$ y $4A = \overset{\circ}{19} + \overset{\circ}{13}$. Dé como respuesta la suma de las cifras.

RESOLUCIÓN

$$A = \overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{2} = 6k + 2 \quad \dots (1)$$

$$4A = \overset{\circ}{19} + \overset{\circ}{13} = 19q + 13 \quad \dots (2)$$

De (1) y (2):

$$4(6k + 2) = 19q + 13$$

$$24k + 8 = 19q + 13$$

$$(\overset{\circ}{19} + \overset{\circ}{5})k = \overset{\circ}{19} + \overset{\circ}{5}$$

$$5k = 19q + 5$$

$$5k = \overset{\circ}{19} + \overset{\circ}{5}$$

$$5(k - 1) = \overset{\circ}{19}$$

$$k = \overset{\circ}{19} + 1 = 19t + 1$$

$$A = 114t + 8 \leq 9999$$

$$A = 9926$$

Suma de cifras: 26

Respuesta : 26

APLICACIÓN 5

Determine el menor número natural de 4 cifras de modo que expresado en los sistemas de numeración de base 3 , 4 y 6 , terminen en las cifras 22, 33 y 55 respectivamente, pero escrito en base 5 , termina en cero.

RESOLUCIÓN

$$N = \dots 22_{(3)} = \overset{\circ}{9} + 22_{(3)} = \overset{\circ}{9} + 8$$

$$N = \dots 33_{(4)} = \overset{\circ}{16} + 33_{(4)} = \overset{\circ}{16} + 15$$

$$N = \dots 55_{(6)} = \overset{\circ}{36} + 55_{(6)} = \overset{\circ}{36} + 35$$

$$N = \overset{\circ}{9} - 1 ; N = \overset{\circ}{16} - 1 ; N = \overset{\circ}{36} - 1$$

$$N = \overline{\text{MCM}(9; 16; 36)} - 1$$

$$N = \overset{\circ}{144} - 1$$

$$N = 144k - 1; \text{ además:}$$

$$N = \dots 0_{(5)} = \overset{\circ}{5}$$

$$144k - 1 = \overset{\circ}{5} ; k_{\text{mín}} = 9$$

$$N_{\text{mínimo}} = 144(9) - 1 = 1295$$

Respuesta : 1295

APLICACIÓN 6

Determine el mayor número de cuatro cifras, de modo que al ser multiplicado por 3, sea múltiplo de 4 más 2; y al ser multiplicado por 4, sea múltiplo de 13 más 1.

RESOLUCIÓN

Sea A el menor número de tres cifras, tal que:

$$\begin{array}{lcl} 3A = \overset{\circ}{4} + 2 & \Rightarrow & 3A = \overset{\circ}{4} + 2 + 4 \\ 4A = \overset{\circ}{13} + 1 & \Rightarrow & 4A = \overset{\circ}{13} + 1 - 13 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A - 2 = \overset{\circ}{4} \\ A + 3 = \overset{\circ}{13} \end{array}$$

Por la propiedad de Arquímedes:

$$A = \begin{cases} \overset{\circ}{4} + 2 + 8 \\ \overset{\circ}{13} - 3 + 13 \end{cases} \Rightarrow A = \overline{\text{MCM}(4; 13)} + 10 = \overset{\circ}{52} + 10 \leq 9999$$

Luego, el mayor valor de A es: $192 \times 52 + 10 = 9994$

Respuesta : 9994

APLICACIÓN DEL BINOMIO DE NEWTON EN LA DIVISIBILIDAD

$$(a + b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{\overset{\circ}{a}} a^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\overset{\circ}{a}} a^{n-1} b + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\overset{\circ}{a}} a^{n-2} b^2 + \underbrace{\binom{n}{3}}_{\overset{\circ}{a}} a^{n-3} b^3 + \dots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{b^n} b^n$$

Ejemplos:

$$(\overset{\circ}{a} + b)^n = \overset{\circ}{a} + b^n$$

$$\cdot (\overset{\circ}{8} + 2)^5 = \overset{\circ}{8} + (2^5) = \overset{\circ}{8} + 32 = \overset{\circ}{8} + \overset{\circ}{8}$$

$$(\overset{\circ}{8} + 2)^5 = \overset{\circ}{8}$$

$$(\overset{\circ}{a} - b)^n = \overset{\circ}{a} + (-b)^n$$

$$\cdot (\overset{\circ}{7} - 3)^4 = \overset{\circ}{7} + (-3)^4 = \overset{\circ}{7} + 81 = \overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7} + 4$$

$$(\overset{\circ}{7} - 3)^4 = \overset{\circ}{7} + 4$$

APLICACIÓN 7

Si $2024^{\overline{\text{UNI2025}}} = \overline{\dots mnp}_{(3)}$, calcule $m + n + p$

RESOLUCIÓN

Se observa lo siguiente:

$$2024^{\overline{\text{UNI2025}}} = \overline{\dots mnp}_{(3)} = (\overset{\circ}{3}^3) + \overline{mnp}_{(3)} = \overset{\circ}{2}7 + \overline{mnp}_{(3)}$$

$$\begin{aligned} \text{Además: } 2024^{\overline{\text{UNI2025}}} &= (\overset{\circ}{2}7 + 26)^{\overline{\text{UNI2025}}} \\ &= (\overset{\circ}{2}7 - 1)^{\overline{\text{UNI2025}}} = \overset{\circ}{2}7 - 1^{\overline{\text{UNI2025}}} = \overset{\circ}{2}7 - 1 \end{aligned}$$

$$2024^{\overline{\text{UNI2025}}} = \overset{\circ}{2}7 + 26$$

Luego, expresamos 26 en base 3 $\Rightarrow 26 = 222_{(3)} \Rightarrow m + n + p = 6$

Respuesta : 6

RESTOS POTENCIALES

Se denominan restos potenciales de cierto número entero respecto a un módulo, a los residuos obtenidos al dividir las potencias sucesivas de dicho número entre el módulo.

Ejemplo: Determine el resto de dividir 13^{152} entre 8

Veamos:

$$\begin{aligned} 13^0 &= \overset{\circ}{8} + 1 \\ 13^1 &= \overset{\circ}{8} + 5 \\ 13^2 &= \overset{\circ}{8} + 1 \\ 13^3 &= \overset{\circ}{8} + 5 \\ 13^4 &= \overset{\circ}{8} + 1 \\ 13^5 &= \overset{\circ}{8} + 5 \\ &\vdots \\ 13^{152} &= \overset{\circ}{8} + r \end{aligned}$$

Periodo

$$g = 2$$

$$g = 2$$

$$13^{2k} = \overset{\circ}{8} + 1$$

$$13^{2k+1} = \overset{\circ}{8} + 5$$

$$152 = \overset{\circ}{2}$$

$$13^{152} = \overset{\circ}{8} + 1$$

$$r = 1$$

Definición:

Sean: $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$
y $\text{MCD}(m, n) = 1$, se define el gaussiano de m módulo n , como el menor entero positivo " g " tal que:

$$m^g = \overset{\circ}{n} + 1$$

APLICACIÓN 8

Si $2028^{\overline{xyz}} = \overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1} + 1$, determine el mayor valor de $\overline{xyz}$. Dé como respuesta $x + y + z$.

RESOLUCIÓN

$$(\overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1} + 4)^{\overline{xyz}} = \overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1} + 4^{\overline{xyz}} \quad \dots (1)$$

Restos potenciales :

$$\left. \begin{aligned} 4^0 &= \overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1} + 1 \\ 4^1 &= \overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1} + 4 \\ 4^2 &= \overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1} + 5 \\ 4^3 &= \overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1} + 9 \\ 4^4 &= \overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1} + 3 \\ 4^5 &= \overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1} + 1 \end{aligned} \right\}$$

Gaussiano = 5



$$\overline{xyz} = 5$$

$$\overline{xyz} \text{ máximo} = 995$$

$$x + y + z = 9 + 9 + 5 = 23$$

Respuesta : 23

PRINCIPALES CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD EN EL SISTEMA DECIMAL

Sea el número: $\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10^1 + f$

Divisibilidad por 2 : Un número es divisible por 2, si termina en cifra par.

$$\overline{abcdef} = 10 \cdot \overline{abcde} + f \Rightarrow \overline{abcdef} = \overset{\circ}{2} + f \Rightarrow f = \overset{\circ}{2}$$

Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5, si termina en 5.

$$\overline{abcdef} = 10 \cdot \overline{abcde} + f \Rightarrow \overline{abcdef} = \overset{\circ}{5} + f \Rightarrow f = \overset{\circ}{5}$$

Divisibilidad por 2^n o 5^n : Un número es divisible por 2^n o 5^n , si sus n últimas cifras son ceros o formen un número que sea divisible por 2^n o 5^n , respectivamente.

Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3, si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Divisibilidad por 7:

R.P: 1; 3; 2; -1; -3; -2; 1; 3; 2; ...

$$\overline{abc\ defgh} = \overset{\circ}{7} + \underbrace{3.a + 1.b - 2.c - 3.d - 1.e + 2.f + 3g + 1.h}_{\overset{\circ}{7}} = \overset{\circ}{7}$$

3 1 -2 -3 -1 2 3 1

Divisibilidad por 9: Un número es divisible por 9, si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Divisibilidad por 11:

R.P: +1, -1, +1, -1, +1, -1, ...

$$\overline{abcde} = \overset{\circ}{11} + \underbrace{1.a - 1.b + 1.c - 1.d + 1.e}_{\overset{\circ}{11}} = \overset{\circ}{11}$$

1 -1 1 -1 1

Divisibilidad por 13:

R.P: 1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, ...

$$\overline{abcde\ fgh} = \overset{\circ}{13} - \underbrace{3.a + 1.b + 4.c + 3.d - 1.e - 4.f - 3g + 1.h}_{\overset{\circ}{13}} = \overset{\circ}{13}$$

-3 1 4 3 -1 -4 -3 1

APLICACIÓN 9

Si: $\overline{xyx(x-y)(y-1)} = \overset{\circ}{21}$, determine el mayor valor de $x + y$.

RESOLUCIÓN

$$\overline{xyx(x-y)(y-1)} = \overset{\circ}{21} \begin{matrix} & \overset{\circ}{3} \\ < & \\ & \overset{\circ}{7} \end{matrix}$$

Criterio 3: $y - 1 = \overset{\circ}{3} \rightarrow y = 1, 4, 7 \dots (1)$

Criterio 7: $\overline{\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y} \overset{\circ}{x} (\overset{\circ}{x} - \overset{\circ}{y}) (\overset{\circ}{y} - \overset{\circ}{1})} = \overset{\circ}{7} \rightarrow \cancel{-3x} - \cancel{y} + 2x + \cancel{3x} - 3y + \cancel{y} - 1 = \overset{\circ}{7}$

$\overset{\circ}{3} \quad \overset{\circ}{1} \quad \overset{\circ}{2} \quad \quad \overset{\circ}{3} \quad \quad \quad \overset{\circ}{1}$

$$2x - 3y - 1 = \overset{\circ}{7} \dots (2)$$

De (1) y (2): $\left\{ \begin{array}{l} y = 1; x = 2 \\ y = 4; x = 3 \\ y = 1; x = 9 \end{array} \right.$

$$y = 4; x = 3$$

$$y = 1; x = 9$$

$$y = 7; x = 4$$

$$\therefore x + y = 10$$

Respuesta : 10

APLICACIÓN 10

Se tienen cinco números consecutivos de tres cifras. Se sabe que la suma de los tres menores es divisible entre 7 y la suma de los tres mayores es múltiplo de 11. Calcule la suma de cifras del residuo que se obtiene al dividir la suma de dichos mayores números posibles entre 2023.

RESOLUCIÓN

Sean los números: $N - 2, N - 1, N, N + 1, N + 2$

$$3N - 3 = \overset{\circ}{7} \rightarrow 3(N - 1) = \overset{\circ}{7} \rightarrow N - 1 = \overset{\circ}{7} \rightarrow N = \overset{\circ}{7} + 43$$

$$3N + 3 = \overset{\circ}{11} \rightarrow 3(N + 1) = \overset{\circ}{11} \rightarrow N + 1 = \overset{\circ}{11} \rightarrow N = \overset{\circ}{11} + 43$$

Luego: $\circ$

$$N = \overline{\text{MCM}(11; 7)} + 43 = 77k + 43 \leq 999, \text{ entonces:}$$

$$\text{Mayor } N = 967 \rightarrow 5N = \overset{\circ}{2023} + 789$$

Respuesta : 24

Criterio de divisibilidad por $(n - 1)$ en base n

Un número escrito en la base n es divisible por $(n - 1)$, si la suma de sus cifras es múltiplo de $(n - 1)$

$$\overline{abcdef}_{(n)} = \overline{(n - 1)} + f + e + d + c + b + a$$

Demostración: $\overline{abcdef}_{(n)} = f + e \cdot n + d \cdot n^2 + c \cdot n^3 + b \cdot n^4 + a \cdot n^5$

$$\overline{abcdef}_{(n)} = f + e \cdot (n - 1 + 1) + d \cdot (n - 1 + 1)^2 + c \cdot (n - 1 + 1)^3 + b \cdot (n - 1 + 1)^4 + a \cdot (n - 1 + 1)^5$$

$$\overline{abcdef}_{(n)} = f + e \cdot (\overline{(n - 1)} + 1) + d \cdot (\overline{(n - 1)} + 1)^2 + c \cdot (\overline{(n - 1)} + 1)^3 + b \cdot (\overline{(n - 1)} + 1)^4 + a \cdot (\overline{(n - 1)} + 1)^5$$

$$\overline{abcdef}_{(n)} = f + \overline{(n - 1)} + e + (\overline{(n - 1)})^2 + d + (\overline{(n - 1)})^3 + c + (\overline{(n - 1)})^4 + b + (\overline{(n - 1)})^5 + a$$

Entonces: $\overline{abcdef}_{(n)} = \overline{(n - 1)} + f + e + d + c + b + a$

Ejemplo: $\overline{abcdef}_{(8)} = \overline{7} + f + e + d + c + b + a$

Criterio de divisibilidad por $(n + 1)$ en base n

Un número escrito en la base n es divisible por $(n + 1)$, si la suma de cifras de orden impar menos la suma de cifras de orden par es múltiplo de $(n + 1)$

$$\overline{abcdef}_{(n)} = \overline{(n+1)} + f - e + d - c + b - a$$

Demostración:

$$\overline{abcdef}_{(n)} = f + e \cdot n + d \cdot n^2 + c \cdot n^3 + b \cdot n^4 + a \cdot n^5$$

$$\overline{abcdef}_{(n)} = f + e \cdot (n + 1 - 1) + d \cdot (n + 1 - 1)^2 + c \cdot (n + 1 - 1)^3 + b \cdot (n + 1 - 1)^4 + a \cdot (n + 1 - 1)^5$$

$$\overline{abcdef}_{(n)} = f + e \cdot (\overline{(n+1)} - 1) + d \cdot (\overline{(n+1)} - 1)^2 + c \cdot (\overline{(n+1)} - 1)^3 + b \cdot (\overline{(n+1)} - 1)^4 + a \cdot (\overline{(n+1)} - 1)^5$$

$$\overline{abcdef}_{(n)} = f + \overline{(n+1)} - e + (\overline{(n+1)})^2 + d + (\overline{(n+1)})^3 - c + (\overline{(n+1)})^4 + b + (\overline{(n+1)})^5 - a$$

Entonces: $\overline{abcdef}_{(n)} = \overline{(n+1)} + f - e + d - c + b - a$

Ejemplo: $\overline{abcdef}_{(6)} = \overline{7} + f - e + d - c + b - a$

APLICACIÓN 11

Al dividir $\overline{5a0436b}_{(8)}$ entre 9, la división resulta exacta; pero al dividirlo entre 7, el residuo resulta 3. Calcule $(a \times b)$

RESOLUCIÓN

$$\overline{5a0436b}_{(8)} = \overset{\circ}{9} \quad \rightarrow \quad b - a - 2 = \overset{\circ}{9} \quad \rightarrow \quad b - a = 2, \text{ o } -7$$

+ - + - + - +

$$\overline{5a0436b}_{(8)} = \overset{\circ}{7} + 3$$

$$5 + a + 0 + 4 + 3 + 6 + b = a + b + 18 = 7 + 3 \quad \rightarrow \quad a + b = 6 \text{ o } 13$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 6 \\ b - a = 2 \end{array} \right\} b = 4; a = 2 \quad \rightarrow \quad a \times b = 2 \times 4 = 8$$

Respuesta : 8

ECUACIÓN DIOFÁNTICA

Es toda ecuación con varias variables, cuyos coeficientes son números enteros y la finalidad es obtener soluciones enteras.

Estudio de las ecuaciones Diofánticas lineales: $ax + by = c$

TEOREMA:

Dada la ecuación $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y donde $d = \text{MCD}(a, b)$ decimos que $ax + by = c$ tiene soluciones enteras si y sólo si $d \mid c$.

Sea $ax + by = c$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $\text{MCD}(a, b) = d$, donde $d \mid c$

$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d} \Rightarrow px + qy = r$ la ecuación tiene soluciones enteras

Sea (x_0, y_0) una solución particular, luego:

$$px + qy = px_0 + qy_0 = r \Rightarrow p(x - x_0) = q(y_0 - y) \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = qt \\ y_0 - y = pt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = x_0 + qt} \quad \boxed{y = y_0 - pt} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Solución General

Aplicación 12

Emilio ensambla computadoras y compra teclados a 345 soles cada uno y monitores a 555 soles, cada uno con una inversión total de 19 680 soles, ¿Cuántos dispositivos electrónicos compró, si el número de monitores es el máximo posible?

Resolución

Se tiene: $345x + 555y = 19\,680$

$\text{MCD}(345, 555) = 15$;

15 | 19680, luego la ecuación tiene soluciones enteras

$$23x + 37y = 1312$$

$$23 + (23+14)y = 23+1 \rightarrow y = 23+5$$

Solución particular: $y_0 = 5 \wedge x_0 = 49$

Solución General

pero:

$$\left. \begin{aligned} x &= 49 + 37t > 0 \\ y &= 5 - 23t > 0 \end{aligned} \right\}$$

$$x = 49 + 37t$$

$$y = 5 - 23t$$

$$-1,48 < t < 0,217$$

El número de monitores es el mayor posible

$$t = -1 \rightarrow x = 1 \text{ teclados}$$

$$y = 28 \text{ monitores}$$

Total : 40

Aplicación 13

Un ganadero acude a la feria regional y gastó S/ 21 800 en adquirir 27 animales entre vacas, toros y caballos. Si las vacas los compró a S/ 400, los toros a S/ 700 y los caballos a S/ 2 000 y adquirió animales de las tres clases. ¿Cuántos toros compró?

A) 8

B) 10

C) 11

D) 13

E) 14

Resolución:

Sea

 $\#vacas = x; \#toros = y; \#caballos = z$

$$x + y + z = 27 \quad \rightarrow \quad z = 27 - x - y$$

Gasto total:

$$400x + 700y + 2\,000(27 - x - y) = 21\,800$$

$$16x + 13y = 322$$

(aplicamos criterio 13:)

$$13 + 3x + 13 = 13 + 10$$

Entonces:

$$3x = 13 + 26 + 10$$

$$x = 13 + 12$$

$$\#vacas = x = 12$$

$$\#caballos = z = 5$$

$$\#toros = y = 10$$

Clave B



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMA 92

¿Cuál es la suma de cifras del número de 4 cifras que es igual a 9 veces el cuadrado de la suma de sus cifras?

A) 14

B) 15

C) 16

D) 17

E) 18

PROBLEMA 94

¿Cuántos números de 3 cifras son múltiplos de 6 pero no son múltiplos de 9?

A) 90

B) 100

C) 120

D) 130

E) 140

PROBLEMA 97

¿Cuántos números de 4 cifras diferentes múltiplos de 4, se pueden formar con las cifras 2,3,4,5,6, y 7.

A)93

B) 94

C) 95

D) 96

E) 97



PROBLEMA 99

Determine un número de 5 cifras sabiendo que es igual a 45 veces el producto de sus cifras. Dar como respuesta la cifra de tercer orden del número.

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 9



PROBLEMA 101

Determine la suma todos los valores que toma " a ", si $2929 \dots 29 \overline{6aa}$ al ser dividido entre 13 (se sabe que el número está formado por 73 cifras 2 y 72 cifras 9), deja como residuo 3

A)7

B)8

C)9

D)10

E)12

PROBLEMA 105

Existen K números de la forma $N = \overline{1a8b2}$ que son múltiplos de 4 y 9 a la vez, el máximo valor de $a + b$ sumado con k es

A)21

B)22

C)23

D)24

E)25

PROBLEMA 110

Dado $(7^a)^7 = 5 + 2$, determine el máximo valor de 3 cifras que puede tomar a (dar como respuesta la suma de sus cifras)

A)23

B)24

C)25

D)26

E)27

PROBLEMA 121

Dados 5 números naturales consecutivos de 2 cifras se sabe que la suma de los 3 menores es divisible entre 7 y la suma de los 3 mayores es múltiplo de 11. Calcule el residuo que se obtiene al dividir la suma de dichos números entre 13.

- A)3 B)4 C)5 D)6 E)7

pre
UNI